Aggregering av kapitalkrav i standardformeln i Solvens II

Magnus Carlehed

Inledning

Det europeiska försäkringsregelverket Solvens II [1] syftar ytterst till att skydda försäkringstagarna och innefattar bland annat solvenskapitalkrav. Tanken är att ett försäkringsbolag ska hålla så mycket kapital att det klarar olika typer av negativa händelser. Man beräknar ett separat kapitalkrav för vart och ett av ett antal olika riskslag, och aggregerar sedan dessa med hjälp av givna "korrelationskoefficienter", vilket ger den så kallade standardformeln. I min diplomuppsats [2] studerar jag denna typ av aggregering och jämför den med en mer korrekt aggregering där riskerna simuleras simultant.

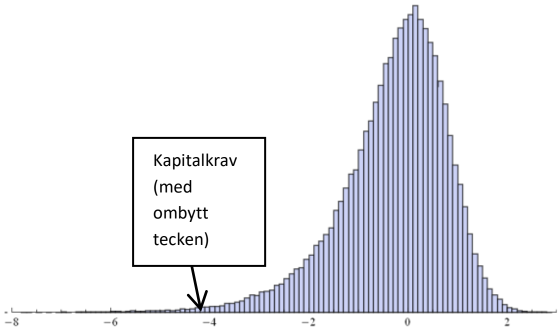
Man definierar eget kapital ("Own Funds", OF) som det diskonterade nuvärdet av alla framtida kassaflöden som härrör från nuvarande portfölj av försäkringskontrakt, givet alla aktuariella antaganden om t ex kapitalavkastning, dödlighet, annullation, etc.

Men mycket kan förstås hända som gör att utfallet avviker från antagandena, och det är detta som kapitalkravet är till för. Man stressar OF under ett scenario (med konfidensnivå 99.5%) som regelverket stipulerar för en viss risktyp, och sedan bildar man det individuella solvenskapitalkravet (SCR) för denna risktyp som skillnaden mellan OF före respektive efter stress.

Aggregeringen sker sedan genom formeln
$\mathrm{SCR}=\sqrt{\mathrm{SCR}_X^2+2\alpha \mathrm{SCR}_X SCR_Y+\mathrm{SCR}_Y^2}$,
där *X* och *Y* är två risker med individuella kapitalkrav SCR_X och SCR_Y och α är en koefficient som ges av regelverket. Notera att det korrekta sättet att ta fram t ex kapitalkravet för *X* är att först simulera *X* och beräkna förändringen av OF i respektive scenario, och till sist beräkna kvantilen för dessa förändringar. Men om OF är en monoton funktion av *X* så fungerar det lika bra att direkt bilda kvantilen för *X* och beräkna förändringen av OF för denna. Det är så standardformeln är uppbyggd.

Två exempel på riskslag är börskrasch på aktier och massiv annullation ("mass lapse") i ett livförsäkringsbolag där båda händelserna ger upphov till förlust av framtida intjäning på grund av att tillgångar under förvaltning, och därmed avgiftsintäkter, minskar. Frågan är nu hur de samvarierar.

Det korrekta, men svåra, sättet att ta fram ett kapitalkrav för två risker är att simulera dem tillsammans ett stort antal gånger, givet deras simultana fördelning, och för varje utfall beräkna förändringen av OF. Därefter bildar man 99.5%-kvantilen av dessa förändringar och får då kapitalkravet.



Heuristisk diskussion

Om vi förenklat antar att OF är proportionell mot tillgångar under förvaltning så kommer båda de nämna scenarierna att var för sig ge upphov till liknande effekter. Om t ex scenario *X* innebär att 40% av tillgångarna går förlorade genom annullation så kommer vi att ha $\mathrm{SCR}_X = \mathrm{OF} - 0.4\ \mathrm{OF}{=}0.6\ \mathrm{OF}$. Om vidare scenario *Y* innebär att 50% av tillgångarna går förlorade genom en aktiekrasch så får vi $\mathrm{SCR}_Y = \mathrm{OF} - 0.5\ \mathrm{OF}{=}0.5\ \mathrm{OF}$. Men om ett annullationsscenario redan inträffat så kommer naturligtvis aktiekraschen endast att påverka de kvarvarande försäkringarna, vilket innebär att vi efter båda scenarierna kommer att ha eget kapital motsvarande $0.5 \cdot 0.6\ \mathrm{OF} = 0.3\ \mathrm{OF}$. Kapitalkravet motsvarande denna dubbelhändelse är således OF-0.3 $\mathrm{OF}{=}0.7\ \mathrm{OF}$. Låt oss nu sätta in de individuella kapitalkraven i aggregeringsformeln ovan:

$$\mathrm{SCR}{=}\sqrt{(0.6\ \mathrm{OF})^2{+}2\alpha(0.6\ \mathrm{OF})(0.5\ \mathrm{OF}){+}(0.5\ \mathrm{OF})^2} = \mathrm{OF}\sqrt{0.61 + 0.6\alpha}.$$

Detta aggregerade kapitalkrav växer med α. För $\alpha = 1$ så blir det 1.1 OF vilket är orimligt, och för $\alpha = 0$ så blir det 0.78 OF, vilket fortfarande är för högt jämfört med dubbelhändelsen. Vill vi återskapa det korrekta kapitalkravet 0.7 OF så kommer vi att behöva välja ett negativt α. Mer precist så kan vi lösa ut α ur ekvationen $0.7{=}\sqrt{0.61 + 0.6\alpha}$, och får $\alpha = -0.2$.

I detta exempel antog vi att de två scenarierna inträffar samtidigt, vilket naturligtvis är ett osannolikt skeende. Skulle vi istället anta att de två händelserna vore korrelerade med en korrelationskoefficient som är mindre än 1, skulle slutsatsen ovan förstärkas, och man skulle få välja ett ännu mer negativt α för att träffa rätt.

Anledningen till detta är främst att de individuella kapitalkraven skapas genom att stressa den *ursprungliga* volymen två gånger, vilket leder till en form av dubbelräkning.

Antaganden

För att undersöka situationen mer noggrant behöver vi införa fördelningsantaganden för *X* och *Y*, något som inte görs i regelverket. Jag har valt att studera fallet där *X* och *Y* antas simultant normalfördelade, var och en med medelvärde 0 och varians 1, samt med korrelationskoefficient ρ. Frågan är hur α beror av ρ. En naiv slutsats skulle vara att dessa är lika, men som vi sett i den heuristiska diskussionen ovan kan de vara rejält olika. Anledningen är portföljens utseende och hur dess värde (dvs OF) svarar på scenarierna. Detta är uppenbarligen helt avgörande för utfallet, men berörs inte i regelverket, där samma α används för alla portföljer. Vi inför värdefunktionen $f(x, y)$ som portföljens värdeförändring (dvs förändringen av OF) när det simultana scenariet (x, y) inträffat. I utgångsläget antas $x = y = 0$, och vi har då $f(0,0) = 0$.

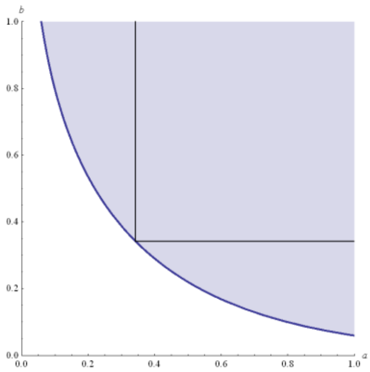
Linjära fallet

Om $f(x,y) = ax + by$, där $a, b > 0$, så beror OF linjärt på riskfaktorerna. I detta fall kan man enkelt visa att $\alpha = \rho$. För små förändringar, dvs när *x* och *y* är nära noll, så är detta approximativt fallet. Tyvärr har vi inte så stor nytta av en sådan linearisering eftersom vi typiskt i Solvens II ser på stora förändringar, t ex aktiekrasch på 39%.

Volymbaserade fallet

Den situation vi beskrev heuristiskt ovan ska vi nu undersöka teoretiskt. Anta att OF = 1 i utgångsläget och att stressfaktorerna är $1 - r_X$ resp $1 - r_Y$ (i exemplet ovan är dessa 0.4 resp 0.5), och definiera $X = (\log r_X)/a$, $Y = (\log r_Y)/b$, där *a* och *b* är positiva konstanter. Vi får värdefunktionen $f(x,y) = e^{aX+bY} - 1$.

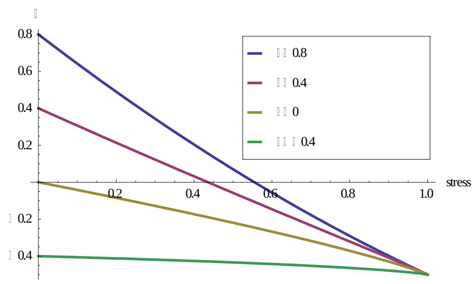
Låt oss fortsätta på exemplet ovan för att konkretisera dessa beteckningar. I Solvens II arbetar man som nämnts med konfidensgraden 99.5%, och aktiestressen för aktier (av typ 1) är enligt regelverket 39%. Det betyder att 99.5%-kvantilen för den stokastiska variabeln $1 - r_X$ är 0.39, dvs 0.5%-kvantilen av r_X är 0.61. Sätter vi in detta i definitionen av *X* så ser vi att 0.5%-kvantilen för *X* är $\log 0.61\ /a$. Men samtidigt har ju *X* antagits standardnormalfördelad, och har således 0.5%-kvantilen lika med $\Phi^{-1}(0.005) = -2.57$. Alltså har vi $a = \frac{\log 0.61}{-2.57} = 0.19$. Vi ser att *a* är en skalfaktor som svarar mot Solvens II-stressens storlek; ett större *a* innebär en större stress.



Jag visar i uppsatsen att om stressarna inte är alltför små, så kommer α att vara negativ, oberoende av ρ. Mer precist så gäller detta om *a* och *b* ligger i det skuggade området i figuren.

Vidare visar jag att för oberoende riskfaktorer ($\rho = 0$), så är α negativ, oberoende av storleken på stressarna.

I nästa graf ser vi hur α beror på ρ och stressens storlek (i fallet *a* = *b*). Vi observerar: 1) Liten stress och hög korrelation ger positivt α, 2) Stor stress ger negativt α, 3) Noll eller negativ korrelation ger negativt α, oavsett stress.



Två aktier

En helt annan situation uppstår med en portfölj med två aktier. I detta fall antar vi, som brukligt är, att var och en av aktierna följer en geometrisk Brownsk rörelse och att dessa processer är korrelerade. Vi implementerar det genom att göra samma antaganden som tidigare beträffande fördelningen för *X* och *Y*. Värdet på aktierna är e^X respektive e^Y. Vi får värdefunktionen $f(x,y) = e^x + e^y - 2$, där varje aktie har värdet 1 i utgångsläget.

I motsats till det föregående fallet har detta ingen analytisk lösning, men man kan visa med en simulering att α är positiv, och till och med större än ρ.

Aktiestress i Solvens II görs separat för två olika klasser av aktier, och dessa aggregeras sedan med korrelationskoefficienten $\alpha = 0.75$, vilket inte är orimligt givet vår simulering; vi kan anta att aktiemarknaderna ifråga är positivt korrelerade från början (dvs ρ är positiv).

Fallstudie

Jag har studerat tre portföljer av livförsäkringar i ett svenskt livförsäkringsbolag. Den första (P1) är ren fondförsäkring, medan den två andra (P2 respektive P3) har vissa inslag av garantier. Vi begränsar oss även här till aktie- och annullationsrisk.

Vi vill simulera de två riskerna simultant och skapa kvantilen för förändringen av OF. Vi skapar först en riskmatris genom att definiera tre scenarier för aktiestress: 0) Ingen stress, 1/2) aktier av typ 1 stressas med 19.5%, 1) aktier av typ 1 stressas med 39%. Övriga innehav i portföljen stressas inte. På liknande sätt definierar vi tre scenarier för annullation: 0) Ingen stress, 1/2) 20% av volymen annulleras, 1) 40% av volymen annulleras. Riskmatrisen bildas sedan genom att kombinera samtliga scenarier vilket ger inalles nio scenarier. Som exempel visar vi här riskmatrisen för P1:

P1, förändring av OF	Aktiestress 0	Aktiestress ½	Aktiestress 1
Annullation 0	0	946	1893
Annullation ½	823	1593	2364
Annullation 1	1647	2240	2835

Varje cell i matrisen visar minskningen av OF, och kräver en omfattande beräkning då samtliga kontrakt i portföljen ska simuleras under det kombinerade scenariet.

För simuleringen antar vi att aktiestress är Student-t-fördelad med en kalibrering som ger rätt kvantil för full stress, och annullationer hämtas från en annan tjocksvansad fördelning kalibrerad så att kvantilen blir den önskade. De två riskfaktorerna antas oberoende. Vi drar 50000 scenarier, vart och ett av dessa är ett par av utfall för de två riskfaktorerna.

I princip skulle vi få det önskade kapitalkravet genom att beräkna förändringen av OF för varje scenario, men detta blir för beräkningstungt. Istället använder vi interpolation i riskmatrisen med hjälp av ett andragradspolynom i två variabler. För detta ändamål gör vi en linjär regression baserat på variablerna $\{E, A, E^2, E * A, A^2\}$ (utan konstantterm), där *E* är aktiestressen och *A* annullationen. Det visar sig att koefficienten för A^2 inte är signifikant skild från noll, dvs OF är relativt linjär i A. Koefficienterna för övriga variabler blir E: 1890, A: 1647, E^2: 2.74, $E * A$: -705. Vi ser att koefficienten för den blandade termen är negativ, vilket är en följd av att de två riskerna till viss del mitigerar varandra.

För vart och ett av de 50000 scenarierna sätter vi in variablernas utfall i andragradspolynomet och får motsvarande förändring av OF. Därefter sorterar vi utfallen från värsta till bästa och beräknar 0.5%-kvantilen. Å andra sidan kan de individuella kapitalkraven avläsas direkt i tabellen, 1893 för aktier och 1647 för annullation. Nu kan vi lösa ut α ur formeln för aggregering, och får $\alpha = -0.19$. För de två andra portföljerna får vi $\alpha = -0.19$ respektive $\alpha = -0.12$.

Slutsatser

Vi ser att den i regelverket valda koefficienten ($\alpha = 0.25$) är för hög på grund av ”dubbelräkning”; ett börsfall efter ett ”mass lapse” drabbar ju inte de annullerade försäkringarna. Slutsatserna kan användas till exempel i ORSA för att utmana standardformeln.

Samtidigt inser man att den som vill skapa ett robust regelverk inte vill underskatta kapitalkraven och därför hellre drar åt det konservativa hållet. Det försäkringsbolag som är missnöjt med effekterna i standardformeln kan alltid utveckla en intern modell och söka godkännande för att använda denna.

Referenser

[1] Europakommissionen: Solvency II-direktivet, 2009/138/EC (2009), http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?qid=1488199287625&uri=CELEX:32009L0138

[2] Carlehed, M.: On the aggregation of capital requirements in Solvency II standard formula (2009), Swedbank